Forberedelseskurs før R1 / S1.

Alle må ha med PC/Mac.

Onsdag 10.00-14.00.	Torsdag 10.00-14.00.	Fredag 10.00-14.00.
Introduksjon. Algebra. Likninger. Likningsystemer og ulikheter.	Oppmøte 09.00 i gymsalen. Derivasjon/Vekstfart. Funksjoner.	Spyder CAS/Funksjoner i Geogebra. «REBUSLØP.»

Matematikk på VGS. (Antall uketimer i parentes.)

	Samfunnsfagsretning	Realfagsretning
Vg1	1P (5)	1T (5)
Vg2	2P (3) eller S1 (5)	R1 (5)
Vg3	S2 (5)	R2 (5)

Bybroen VIDEREGÅENDE SKOLE

Utstyr som trengs for R1/S1 og forberedelseskurset.

-PC/Mac/Chromebook med:

-Geogebra: (http://www.geogebra.org/download)

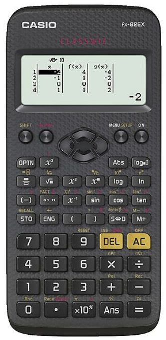
-Læreboka bruker versjonen som heter “Geogebra Classic 6.”

-Vi kommer til å bruke både Geogebra classic 5 og 6.

-Spyder: (www.spyder.org)

<table>
<tr>
<td>-Enkel kalkulator er sterkt anbefalt.
(https://www.clasohlson.com/no/Casio-FX-82EX-ClassWiz-kalkulator/44-1933)

Geogebra kan gjøre alt det en kalkulator kan gjøre, men det er tungvint å bruke Geogebra til ”vanlig regning”.

Det er flere andre modeller som kan brukes. Spør meg dersom du har en du lurer på om er ok! Kalkulatoren på mobiltelefonen/nettbrettet er ikke lov å bruke på prøver/eksamen.</td>
<td>Den ser sånn ut!
</td>
</tr>
</table>

Nettressurser:

www.matematikk.net

www.ndla.no

www.udl.no

www.youtube.com

De neste sidene i dette dokumentet er utdrag fra 1T-boka til Gyldendal som heter Mønster-1T.

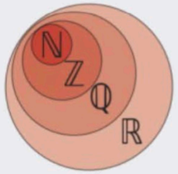
Både kapittelsammendrag og øvingsoppgaver er med for hvert kapittel.

På forkurset kommer vi til å jobbe med deler av dette, men ikke alle. Dette heftet er ikke et fullverdig kurs i 1T, men med hjelp fra nettressursene kan man jobbe godt med alle temaene. Det aller beste er å skaffe seg en 1T-bok og jobbe med den. Da er det viktig at boka tilhører den nye læreplanen LK20. Å gjenkjenne om boka er fra ny eller gammel læreplan ser man lettest ved å se etter om sannsynlighet er med som tema. I den nye læreplanen er ikke sannsynlighet med.
Dersom man har tilgang på en bok fra den gamle læreplanen er den også grei å jobbe med. Stort sett alt unntatt sannsynlighet er likt som i den nye læreplanen.

Innhold

MØNSTER OG OVERSIKT

Tallmengder



Naturlige tall $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Hele tall $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Rasjonale tall $\mathbb{Q}$: alle brøker

Reelle tall $\mathbb{R}$: alle tall

Regneregler

La $a, b \in \mathbb{R}$, der begge er positive.

$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$

$(-a) \cdot b = -a \cdot b$

$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Regnerekkefølge

1 Parenteser
2 Potenser
3 Multiplikasjon og divisjon
4 Addisjon og subtraksjon

Brøk

Addisjon og subtraksjon av brøk: Vi utvider brøkene til de har samme nevner og setter alt på felles brøkstrek:

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10 - 12}{15} = -\frac{2}{15}$$

Multiplikasjon av brøk: Vi multipliserer teller med teller og nevner med nevner:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Brudden brøk: Vi utvider hovedbrøkstreken med fellesnevner:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{15}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 15}{\frac{4}{15} \cdot 15} = \frac{2 \cdot 5}{4} = \frac{5}{2}$$

Divisjon av brøk: Vi snur den bakerste brøken opp ned og multipliserer med den:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

Prosent

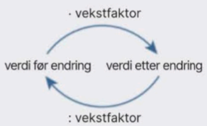
Vekstfaktor:

Økning: 100 % + p %.

Økning på 5 % gir vekstfaktoren 1,05.

Reduksjon: 100 % − p %.

Reduksjon på 3 % gir vekstfaktoren 0,97.



Avgjør om påstandene stemmer

a Alle naturlige tall er også rasjonale tall.

b $-2^2 = (-2)^2$

c $\frac{1}{9}$ er et irrasjonalt tall.

d En butikk legger på 24 % merverdiavgift og gir deretter 24 % rabatt. Da blir prisen uendret.

e $\frac{7}{8} > \frac{8}{9}$

f $5 - 2^3 + 3 \cdot 2 = 3$

g 30 % og $\frac{1}{3}$ er det samme.

h Å dividere med 0,7 og multiplisere med 1,3 er ikke det samme.

Test deg selv

Uten hjelpemidler

1.48
Gi eksempel på

a et naturlig tall, et tall i $\mathbb{N}$

b et heltall, et tall i $\mathbb{Z}$

c et rasjonalt tall, et tall i $\mathbb{Q}$

d et reelt tall, et tall i $\mathbb{R}$

1.49
En høyttaler koster 640 kr etter at den er satt ned 20 %. Hvor mye kostet høyttaleren før prisen ble satt ned?

1.50
Trekk sammen:

a $2a + 3b + 5a - 2b$

b $3(a - 2) - 3(4 - a)$

c $2(x + y) + 3x + 2y + 3(x - y)$

d $4(2a - b) - 2(3a - 3b)$

1.51
Regn ut:

a $\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$ **b** $2 \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\right)$ **c** $8 : \frac{1}{2}$

1.52
Ranger tallene fra minst til størst:

$\pi^2, \ \frac{48}{4}, \ (-3)^2, \ \frac{4}{3} + \frac{1}{4}$

1.53
Regn ut:

a $\frac{1}{4}(x + 1)(4 - x)$ **b** $\frac{x}{4} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

1.54
Judith har til sammen 50 gensere, bukser og T-skjorter. Hun har dobbelt så mange T-skjorter som bukser og seks flere gensere enn bukser.

Hvor mange gensere har Judith?
Hvor mange bukser og hvor mange T-skjorter har Judith?

1.55
I en klasse er det 27 elever. På en matematikkprøve fikk $\frac{7}{9}$ av elevene karakteren 4 eller bedre.

Hvor mange elever fikk lavere karakter enn 4 på prøven?

Med hjelpemidler

1.56
Regn ut:

a $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}}$

b $24 : (3 + 5) - 3 \cdot 4 : 12 + 3^2$

c $\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1)$

1.57
Ved kommunevalget i 2019 fikk Senterpartiet 14,4 % av stemmene. Det var en framgang på 5,9 prosentpoeng fra forrige kommunevalg.

a Hvor stor oppslutning hadde Senterpartiet ved forrige kommunevalg?

b Hvor mange prosent større oppslutning hadde Senterpartiet i 2019 enn i 2014?

1.58
I 2020 koster et bestemt skateboard 1849 kr. Dette er en økning på 8,5 % fra året før.

a Hvor mye kostet skateboardet i 2019?

b Hva vil skateboardet koste i 2027 hvis det fortsatt er en økning på 8,5 % hvert år?

1.59
På en konsert var det 400 tilskuere. $\frac{1}{8}$ av tilskuerne hadde VIP-billett til indre ståplassområde, og $\frac{2}{5}$ hadde sitteplass på tribune.

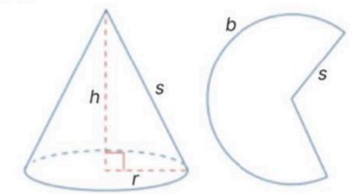
Hvor mange tilskuere hadde en annen type billett?

1.60
På en klassefest var det 28 elever, der 18 var gutter. Hvor mange prosent var gutter?

1.61
Regn ut:

a $\frac{18}{15} : \frac{7}{4}$ **b** $\left(\frac{24}{5} - \frac{3}{7}\right) : \frac{68}{35}$

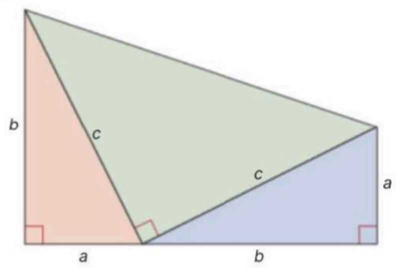
1.62



Vis at overflaten av en kjegle med radius r og høyde h er gitt ved

$O = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

1.63



Formelen for arealet av et trapes er

$\frac{(a + b)}{2} \cdot h$

a Finn et uttrykk for arealet av figuren ved å bruke formelen.

b Finn et uttrykk for arealet av figuren ved å legge sammen arealet av trekantene.

c Bruk de to uttrykkene til å bevise Pytagoras' setning. (Dette er den amerikanske presidenten Garfields bevis for Pytagoras fra 1876.)

MØNSTER OG OVERSIKT

Likninger av første grad

- En likning er matematiske uttrykk, variabler eller tall som er satt sammen med et likhetstegn.
- Verdier som får høyre og venstre side av likhetstegnet til å bli like store, er løsninger til likningen. For eksempel er 3 en løsning til likningen $x + 2 = 5$.
- Vi kan løse likninger både ved å gjette, tegne figurer og bruke bokstaver og tall.

Kvadratsetningene

1. kvadratsetning:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. kvadratsetning:
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Konjugatsetningen:
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Fullstendig kvadrat

- Et fullstendig kvadrat er et andregradsuttrykk som kan faktoriseres ved hjelp av første eller andre kvadratsetning. For eksempel er $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ et fullstendig kvadrat.
- Vi kan bygge ut andregradsuttrykk til et fullstendig kvadrat ved å ta utgangspunkt i leddene av første og andre grad:

$$x^2 + px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$
$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Likninger av andre grad

- Likninger på formen $ax^2 + bx + c = 0$, der $a \neq 0$, kaller vi andregradslikninger eller kvadratiske likninger. Slike likninger kan vi løse ved å bygge ut fullstendige kvadrater.
- Likningen $x^2 + 8x = 33$ er eksempel på en slik likning, og vi kan løse den ved å bygge ut et kvadrat på venstre side:

$$x^2 + 8x = 33$$
$$x^2 + 8x + 16 = 33 + 16 \quad \cdots \text{ Vi legger til 16 på begge sider}$$
$$(x+4)^2 = 49 \quad \cdots \text{ Vi skriver venstre side som et fullstendig kvadrat}$$
$$x + 4 = \pm 7$$
$$x + 4 = -7 \quad \text{eller} \quad x + 4 = 7$$
$$x = -11 \quad \text{eller} \quad x = 3$$

Løsning ved hjelp av faktorisering

- Når $c = 0$, kan vi skrive likningen på formen $ax^2 + bx = 0$.
- Når et produkt er null, må en eller flere av faktorene i produktet være null.
Dette kaller vi produktregelen.
- I likningen $x^2 + 2x = 0$ kan vi faktorisere ut x og skrive $x(x+2) = 0$. Løsningene er $x = 0$ og $x = -2$. Det er disse to x-verdiene som får venstre side til å bli null.

Løsning ved hjelp av sum og produkt

- Hvis likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsninger, kan vi skrive likningen på formen $(x + p)(x + q)$. Da vil $p + q = b$ og $p \cdot q = c$.
- Likningen $x^2 + 4x + 3 = 0$ kan skrives som $(x + 3)(x + 1)$ fordi $3 + 1 = 4$ og $3 \cdot 1 = 3$. Produktregelen gir oss at $x = -3$ og $x = -1$ er løsninger til likningen.

Løsningsformel for andregradslikninger

- Likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dette kaller vi løsningsformelen for andregrads-likninger.

Uttrykk og likninger

- Et algebraisk uttrykk gir ingen verdi til variablene. En likning løser vi for å finne verdien av den ukjente.

Avgjør om påstandene stemmer

a Kvadratet av et uttrykk med flere ledd er lik summen av kvadratene av hvert enkelt ledd.

b $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ er en identitet siden likningen er oppfylt for alle verdier av a og b.

c Likningen $(x + 2)(x + 3) = 1$ kan løses ved hjelp av produktregelen.

d Uttrykket $x^2 + 5x + 10$ er ikke et fullstendig kvadrat.

e $\sqrt{9} = \pm 3$ fordi både $(-3)^2 = 9$ og $3^2 = 9$.

f Uttrykkene $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ og $a^2 + b^2$ vil for alle verdier av a og b kunne framstilles geometrisk som kvadrater.

g Likningen $x^2 + 4x = -5$ har ingen løsning.

Test deg selv

Uten hjelpemidler

2.50
Løs likningene:

a $x + 3 = 18 - 2x$ **b** $4 - 2x = 3 - 3x$

c $x - 2 = x + 4$

2.51
Avgjør hvilke av uttrykkene som er fullstendige kvadrater:

a $x^2 - 10x + 10$ **b** $2x^2 + 8x + 8$

c $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

2.52
Regn ut ved hjelp av konjugatsetningen:

a $18 \cdot 28$ **b** $81 \cdot 89$ **c** $994 \cdot 1006$

2.53
Løs likningene:

a $x^2 - 10x + 25 = 0$ **b** $x^2 + 2x - 35 = 0$

c $x^2 + 6x + 10 = 0$

2.54
Skriv så enkelt som mulig:

a $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$ **b** $\dfrac{x^2 - 10x + 21}{2x - 14}$

2.55
Arin har inngått et veddemål. Han skal ta situper hver dag i fem dager. Han vinner veddemålet hvis han greier å doble antall situper hver dag.
Etter fem dager har han til sammen tatt 186 situper og vinner veddemålet.

Hvor mange situper tok han den tredje dagen?

Med hjelpemidler

2.56
Wattimer (Wh) er en enhet for måling av energi.
En elbil har et batteri på 75 000 Wh. Ved normal kjøring bruker bilen i gjennomsnitt 153 Wh/km.

a Lag et uttrykk som viser energibruken etter x km.

b Lag et uttrykk som viser hvor mye energi det er igjen på batteriet etter x km.

c Hvor lang rekkevidde har elbilen?

2.57
En fotballkeeper sparker en ball. Høyden til ballen etter t sekunder kan beskrives med uttrykket

$$h = -5t^2 + 15t$$

Bruk fullstendig kvadrat til å finne ut når ballen er på sitt høyeste. Hvor høyt er den da?

2.58
Et oljefat har form som en sylinder.
Høyden av fatet er 86 cm, og overflaten er 2,0 m^2.

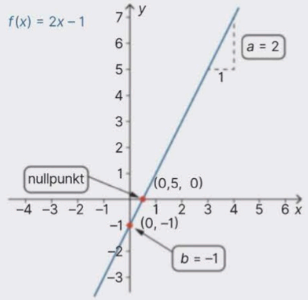
a Hva er radien til fatet?

b Hvor mange liter olje rommer fatet?

MØNSTER OG OVERSIKT

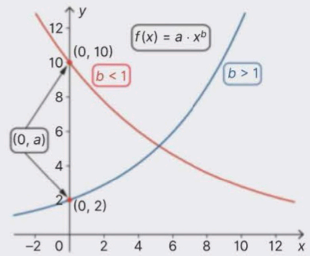
Lineære funksjoner

En lineær funksjon kan skrives på formen $f(x) = ax + b$, der a er stigningstallet, og b er konstantleddet.



Eksponentialfunksjoner

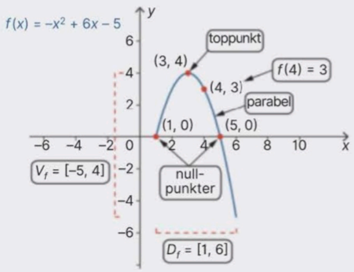
En eksponentialfunksjon har formen $f(x) = a \cdot b^x$. Grafen skjærer y-aksen i a og stiger eller faller med en fast prosent gitt ved vekstfaktoren b.



Polynomfunksjoner

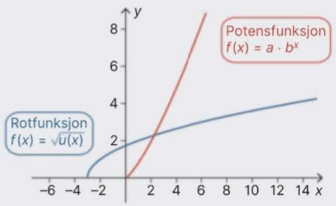
Polynomfunksjoner består av flere ledd på formen kx^n og kan ha ett eller flere ekstremalpunkter.
En andregradsfunksjon har formen $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Hvis $a > 0$, vender grafen den hule siden opp (⌣) og har et bunnpunkt.
- Hvis $a < 0$, vender grafen den hule siden ned (⌢) og har et toppunkt.



Potensfunksjoner og rotfunksjoner

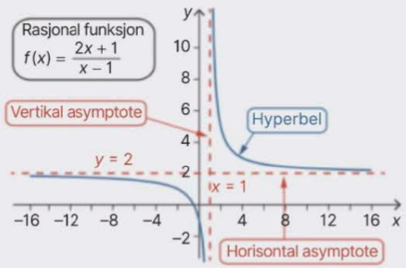
Potensfunksjoner har formen $f(x) = a \cdot x^b$.
Rotfunksjoner inneholder et rotuttrykk med variabelen.



Rasjonale funksjoner

En rasjonal funksjon er på formen $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, der $c \neq 0$.

- Horisontal asymptote er $y = \dfrac{a}{c}$.
- Vertikal asymptote er $x = -\dfrac{d}{c}$.



Modellering og regresjon

Matematisk modellering handler om å beskrive virkeligheten med matematikk, for eksempel i form av en funksjon. Regresjon bruker vi til å finne den funksjonen som passer best mulig til et sett punkter.

Avgjør om påstandene stemmer

a Linja $y = -\dfrac{3}{4}x + 3$ har nullpunkt når $x = 4$.

b Linja gjennom punktene $(0, -2)$ og $(4, 0)$ har stigningstall lik $-\dfrac{1}{2}$.

c Grafen til en andregradsfunksjon må ha et toppunkt eller et bunnpunkt.

d Grafen til en andregradsfunksjon har minst ett nullpunkt.

e Grafen til funksjonen $g(x) = -(x-3)^2$ har et toppunkt som også er et nullpunkt.

f Grafen til en eksponentialfunksjon kan ikke gå gjennom origo.

g Funksjonsverdien til $f(x) = 10 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ minker med 25 % når x øker med 1.

h Grafen til en potensfunksjon peker alltid oppover mot høyre.

i Rotfunksjonen $f(x)$ er bare definert for $x \geq 0$.

j Grafen til en rasjonal funksjon har et nullpunkt for x-verdien som gir null i nevneren.

k Grafen til funksjonen $g(x) = -\dfrac{x}{x+1}$ har $x = -1$ som vertikal asymptote og $y = -1$ som horisontal asymptote.

l Ved lineær regresjon finner vi en linje som enten treffer alle punktene, eller som ligger både over og under punktene i datamaterialet.

m Hvis en størrelse vokser eller minker med omtrent like mange prosent i hver periode, kan vi bruke en eksponentialfunksjon som modell.

Bybroen
VIDEREGÅENDE SKOLE

Test deg selv

Uten hjelpemidler

3.61

Likningen for en linje er gitt ved $y = \frac{1}{2}x + 2$.

a Tegn linja i et koordinatsystem.

b Finn nullpunktet til y.

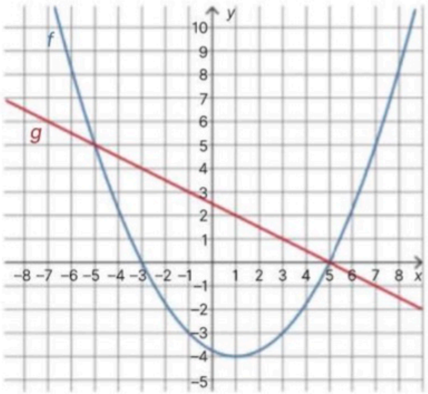
En annen linje skjærer y-aksen når $y = 7$, og har nullpunkt når $x = 4$.

c Tegn linja i samme koordinatsystem.

d Finn likningen for linja.

3.62

Figuren viser grafene til funksjonene f og g:



a Finn $g(-3)$ og $g(3)$.

b Finn stigningstallet til g.

c Finn funksjonsuttrykket for g.

d Finn bunnpunktet til f.

e Finn nullpunktene til f.

f Løs likningen $f(x) = 5$ grafisk.

g Løs likningen $f(x) = g(x)$ grafisk.

h Finn funksjonsuttrykket for f.

3.63

Emilie er medlem av en squashklubb og betaler medlemskontingent hver måned. Som medlem får hun leie banetid til redusert timepris.
En måned leide hun bane i fem timer, og med kontingenten betalte hun til sammen 1150 kr.
Neste måned leide hun bane i åtte timer.
Det kostet til sammen 1690 kr.

a Hvilken timepris betaler Emilie for å leie squashbanen?

b Hvor mye koster medlemskapet per måned?

c Lag en funksjon $f(x)$ som viser hvor mye Emilie må betale totalt en måned da hun leier bane i x timer.

Ikke-medlemmer kan leie banetid i klubben for 230 kr per time.

d Lag en funksjon $g(x)$ som viser hvor mye ikke-medlemmer må betale for å leie bane i x timer.

e Hvor mange timer må Emilie leie bane hver måned for at medlemskapet skal lønne seg?

3.64

Bakterier er de organismene det finnes flest av på jorda. Bakterier formerer seg ved todeling, og under gunstige forhold kan antallet mangedobles i løpet av en time.

I en bakteriekultur er det 5000 E. coli-bakterier.
I denne kulturen dobles antallet hvert tjuende minutt.

a Hvor mange bakterier er det i bakteriekulturen etter en time?

b Lag en funksjon $f(t)$ som viser antall bakterier etter t timer.

c Skisser grafen til f når $0 < t < 2$.

d Omtrent hvor lang tid tar det før det er 100 000 bakterier i kulturen?

e Hvor mange prosent øker antallet med for hver time?

Med hjelpemidler

3.65

En modell som viser veksten til en blomst, er gitt ved

$$f(x) = x^{1,5}, \quad x \in [0, 18]$$

Her er $f(x)$ høyden i centimeter x uker etter at blomsten er plantet.

a Tegn grafen til f.

b Hvor høy er blomsten etter fem uker?

c Hvor lang tid går det før blomsten er 40 cm høy?

3.66

Innbyggertallet i en norsk kommune fulgte følgende modell fra 2010 til 2018:

$$f(t) = -0{,}052t^2 + 0{,}34t + 4{,}8, \quad t \in [0, 8]$$

Her er $f(t)$ folketallet målt i antall tusenere t år etter 2010.

a Hva var innbyggertallet i 2010?

b Tegn grafen til f.

c Når var folketallet høyest, og hvor mange bodde det i kommunen da?

3.67

En klasse vil arrangere klassefest og leier et lokale til 4000 kr. I tillegg regner de med å bruke 110 kr på mat og drikke til hver person.

a Vis at når det kommer x elever på festen, vil prisen per elev være gitt ved

$$f(x) = \frac{4000 + 110x}{x}$$

b Tegn grafen til funksjonen i intervallet $[1, 30]$.

c Hvor mye må hver betale hvis det kommer 15 elever på festen?

d Hvor mange må møte opp hvis prisen per elev ikke skal overstige 300 kr?

e Hvor mange elever kommer på festen hvis de totale utgiftene er 6750 kr?

3.68

Tabellen viser årlige utslipp av giftige gasser fra en bedrift x år etter 2018:

År etter 2018	0	2	4	6	8	10
Utslipp i tonn	500	387	300	232	180	139

a Bruk regresjon til å vise at en passende modell for utslippet er

$$f(x) = 500 \cdot 0{,}88^x$$

b Tegn grafen i intervallet $[0, 20]$.

c Hvor mange tonn vil bedriften slippe ut i 2030 ifølge modellen?

d Når vil utslippet komme under 80 tonn?

KAPITTEL 4 – ALGEBRA

MØNSTER OG OVERSIKT

Polynomdivisjon

Polynomdivisjon er en metode for å finne alle faktorene til et polynom.

Utregningen viser en polynomdivisjon med rest 3.

$$
\begin{array}{l}
(\;x^2 + 3x - \;\;7) : (x-2) = x + 5 + \dfrac{3}{x-2} \\
\underline{-(x^2 - 2x)} \\
\qquad\quad 5x - \;7 \\
\qquad \underline{-(5x - 10)} \\
\qquad\qquad\quad 3
\end{array}
$$

Vi faktoriserer polynomer for å løse likninger, ulikheter og forkorte rasjonale uttrykk.
Her viser vi et tredjegradspolynom som er faktorisert:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x+1)(x+3)$$

Rasjonale uttrykk

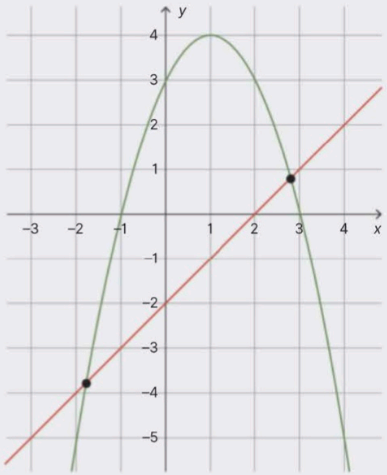
Et rasjonalt uttrykk kan vi forkorte slik:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x-1} &= \frac{x(x-2)(x-1)}{x-1} \\
&= \frac{x(x-2)}{1} \cdot \frac{x-1}{x-1} \\
&= \frac{x(x-2)}{1} \cdot 1 \\
&= x(x-2)
\end{aligned}
$$

Likningssystem

Et likningssystem består av to likninger med to ukjente.
Vi har flere metoder for å løse likningssystemer.

- Grafisk løsning betyr å finne skjæringspunktet mellom grafene:



- addisjonsmetoden betyr å legge sammen likningene
- innsettingsmetoden betyr å sette et uttrykk fra en likning inn i den andre
- løsning med CAS kan vi gjøre i GeoGebra

Ulikheter

Ulikheter av første grad løser vi på samme måte som likninger, bortsett fra en viktig forskjell:
Når vi ganger eller deler en ulikhet med et negativt tall, må vi snu ulikhetstegnet.

Vi bruker symbolene
$<$ (mindre enn)
$\leq$ (mindre enn eller lik)
$>$ (større enn)
$\geq$ (større enn eller lik)

Når vi skal løse ulikheter av høyere grad, kan vi lage fortegnslinjer for å finne løsningen:

$$x^2 - 7x + 12 \leq 0$$
$$(x-3)(x-4) \leq 0$$

Løsningen til ulikheten er $x \in [3, 4]$.

Numerisk løsning av likninger

Å løse en likning er det samme som å finne nullpunkter til en funksjon. Vi kan løse likninger numerisk og finne tilnærmingsverdier for løsningene.
Vi kan også skrive et program som bruker halveringsmetoden til dette.

Avgjør om påstandene stemmer

a Et tall t er delelig med k hvis t er en faktor i k.

b Vi må snu ulikhetstegnet når vi trekker fra et negativt tall på begge sider av en ulikhet.

c Vi kan alltid løse et likningssystem grafisk ved å finne et skjæringspunkt.

d En lineær faktor er en potens.

e Symbolet $\geq$ betyr større enn eller lik.

f Ulikheten $-x^2 > 1$ har ingen løsning.

g Når vi skal løse en brøkulikhet ved regning, må vi normalt bruke fortegnsskjema.

h Likningssett løser vi raskest med løsningsformelen for andregradslikninger.

i Når vi faktoriserer, blir faktorene skilt med gangetegn.

j Et rasjonalt uttrykk inneholder en divisor.

k Vi bruker halveringsmetoden til å regne ut halvparten av nullpunktene til en funksjon.

Bybroen VIDEREGÅENDE SKOLE

Test deg selv

Uten hjelpemidler

4.38
Løs ulikhetene:

a $2x - 3 > -x + 2$

b $x^2 + 2x - 8 < 0$

c $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} > 0$

4.39
Forkort uttrykkene hvis det er mulig:

a $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 2}$

b $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 12}{x + 3}$

c $\dfrac{5x + 25}{5x + x^2}$

4.40
Utfør polynomdivisjonene:

a $(x^2 + 2x - 8) : (x - 2)$

b $(x^3 - 7x + 6) : (x + 3)$

c $(x^3 - x^2 + x + 1) : (x + 1)$

d $(x^4 - 2x^2 - 6) : (x - 2)$

4.41
Anita og Hanna er til sammen 62 år.
Om to år er Hanna akkurat dobbelt så gammel som Anita. Hvor gamle er de i dag?

4.42
Løs likningssystemet grafisk:

$$\begin{bmatrix} y + 3 = 2x \\ y = 5 \end{bmatrix}$$

Med hjelpemidler

4.43
Løs ulikhetene grafisk og med CAS:

a $x^2 + 6x + 8 < 0$

b $2x^2 + 8x \geq x - 3$

4.44
En bonde skal lage en rektagulær innhegning med 40 m gjerde. La x og y være sidene i innhegningen.

a Tegn figur og forklar at omkretsen av innhegningen er gitt ved

$$2y + 2x = 40$$

b Løs likningssettet:

$$\begin{bmatrix} y \cdot x = 96 \\ 2y + 2x = 40 \end{bmatrix}$$

c Hva forteller løsningen på likningssettet og likningen $y \cdot x = 96$?

4.45
Løs likningssettene grafisk og med CAS:

a $\begin{bmatrix} y = 3x + 4 \\ y = 5x + 2 \end{bmatrix}$

b $\begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} + y = \dfrac{1}{2}x \\ 2x = 1 - y \end{bmatrix}$

4.46
Utfør polynomdivisjonene:

a $(x^3 + x^2 - 4x - 4) : (x + 1)$

b $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1)$

c $(x^4 - 2x^2 + 2ax - 2) : (x - 1)$

4.47
Gitt polynomet

$$P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$$

a Utfør polynomdivisjonen $P(x) : (x - 2)$.

b Finn nullpunktene til $P(x)$.

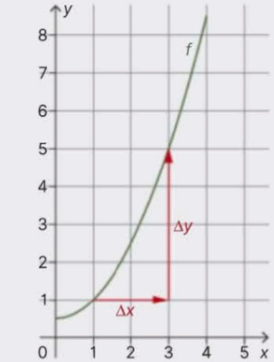
c Løs ulikheten $P(x) < 0$.

MØNSTER OG OVERSIKT

Gjennomsnittlig vekstfart

Den gjennomsnittlige vekstfarten måler vi i et intervall. Det er endringen i y-retning dividert med endringen i x-retning:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

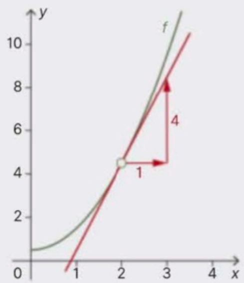


Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[1, 3]$ er $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

Momentan vekstfart

Den momentane vekstfarten når $x = a$, er stigningstallet til tangenten i $(a,\ f(a))$.

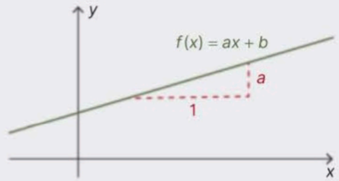
Den momentane vekstfarten når $x = 2$, er 4 fordi stigningstallet til tangenten i $(2,\ f(2))$ er 4:



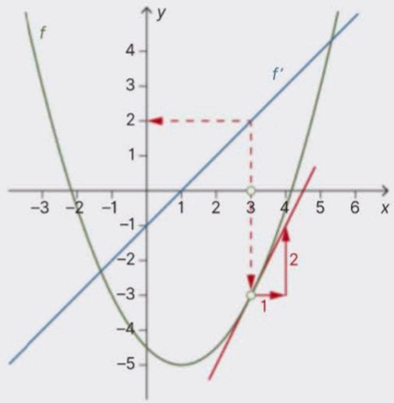
Den deriverte funksjonen

Funksjonen som gir stigningstallet til en tangent i et hvilket som helst punkt på grafen f, kaller vi den deriverte funksjonen $f'(x)$. Stigningstallet til tangenten i $(a,\ f(a))$ er altså $f'(a)$.

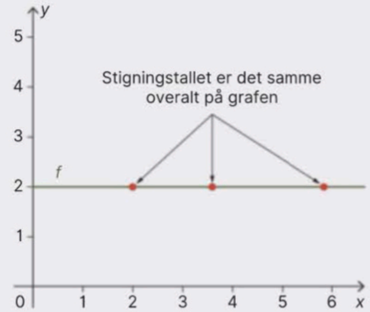
Dersom $f(x) = ax + b$, er $f'(x) = a$. Stigningstallet til linja er a:



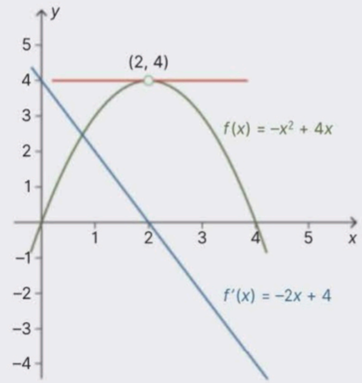
Figuren viser grafene til f og f'. $f'(3) = 2$ fordi stigningstallet til tangenten i $(3,\ f(3))$ er 2:



Når $f(x) = k$, der k er en konstant, vil $f'(x) = 0$. Grafen til f er en vannrett linje med stigningstall null. Uansett hvor vi er på grafen til f, vil den momentane vekstfarten være null.



Ekstremalpunkter er punkter på grafen med høyere eller lavere verdi enn punktene i nærheten. Vi kan finne disse punktene ved å løse likningen $f'(x) = 0$:



Grafen til $f(x) = -x^2 + 4x$ har et toppunkt i $(2, 4)$. Grafen til $f'(x)$ har et nullpunkt her.

Avgjør om påstandene stemmer

a Den gjennomsnittlige vekstfarten er stigningstallet til tangenten i et punkt på grafen.

b Den deriverte til en andregradsfunksjon er alltid en førstegradsfunksjon.

c Vi kan få en tilnærmingsverdi til den momentane vekstfarten ved å finne den gjennomsnittlige vekstfarten over et nokså stort intervall.

d Den gjennomsnittlige vekstfarten mellom to punkter på grafen til en lineær funksjon er den samme uansett hvilket intervall vi velger.

e Stigningstallet til tangenten i et punkt $(a,\ f(a))$ på grafen til f gir oss den momentane vekstfarten i $x = a$.

f Den deriverte funksjonen gir oss den gjennomsnittlige vekstfarten mellom to punkter på grafen.

g Hvis f er en lineær funksjon, vil den deriverte funksjonen være en konstant.

h Mange forskjellige funksjonsuttrykk kan ha det samme uttrykket for sin deriverte funksjon.

i $f'(a)$ gir oss den momentane vekstfarten i $(a,\ f(a))$, mens $f(a)$ gir oss stigningstallet til tangenten i punktet $(a,\ f(a))$.

j For å finne topp- og bunnpunkter på en graf løser vi likningen $f'(x) = 0$, siden tangenten er vannrett i disse punktene.

Test deg selv

Uten hjelpemidler

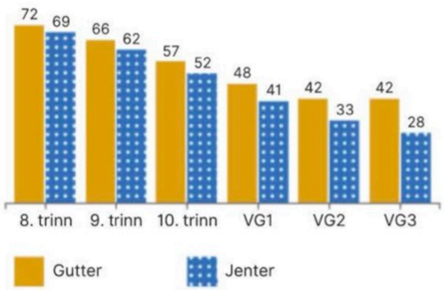
5.47
Vi har gitt funksjonen

$f(x) = x^2 - 3x - 3$

Finn den gjennomsnittlige vekstfarten i disse intervallene:

a $[3, 4]$ **b** $[-1, 2]$ **c** $[0, 3]$

5.48
Søylediagrammet viser prosentandelen unge som er aktive i et idrettslag:



(Kilde: ungdata.no)

Hva er ifølge diagrammet den gjennomsnittlige vekstfarten mellom 8. trinn og VG2

a for gutter

b for jenter

Hva forteller svaret deg i praksis?

5.49
Om funksjonen f får du vite at stigningstallet til tangenten i $(1, f(1))$ er 2, og at stigningstallet til tangenten i $(2, f(2))$ er 4.

a Finn funksjonen til den deriverte $f'(x)$.

b For hvilken x-verdi har funksjonen $f(x)$ et ekstremalpunkt?

c Er dette et toppunkt eller et bunnpunkt?

5.50
Vi har gitt funksjonen

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$

a Finn $f'(x)$.

b Forklar hvorfor grafen til f ikke har noen ekstremalpunkter.

c I hvilket punkt på grafen til f er den momentane vekstfarten minst?

d Hva er stigningstallet til tangenten i dette punktet?

e Finn likningen til tangenten i dette punktet.

5.51
Deriver funksjonene:

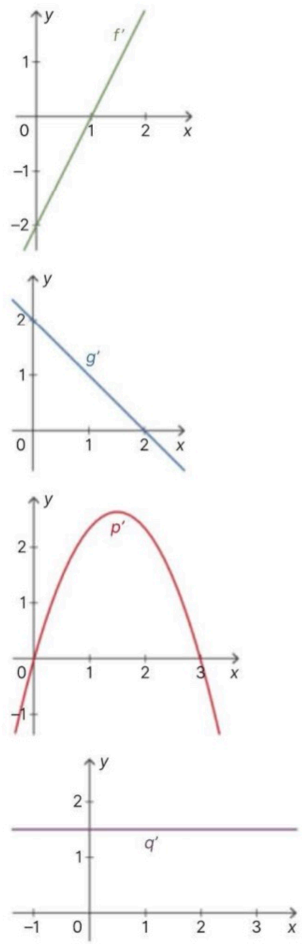
a $f(x) = 5x + 8$

b $g(x) = 2x^2 + 7x - 4$

c $h(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2{,}4x^2 - 5x + \frac{7}{2}$

5.52
Figurene viser grafene til de deriverte funksjonene f', g', p' og q'. Bruk figurene til å finne x-verdiene til eventuelle ekstremalpunkter på grafene til f, g, p og q.

Avgjør også om disse verdiene gir toppunkter eller bunnpunkter.



Med hjelpemidler

5.53
Tabellen viser utviklingen i et fond siden starten i 2000:

x, år etter 2000	0	2	6	10	14	18
$f(x)$, millioner kroner	72	136	198	235	265	270

a Vis at

$f(x) = -0{,}71x^2 + 23{,}2x + 81{,}09, \quad x \in [0, 30]$

er en passende modell for utviklingen i fondet. Her er $f(x)$ verdien av fondet x år etter 2000.

b Forklar hvorfor vekstfarten alltid minker, og hvordan fondet kan vokse samtidig som vekstfarten minker.

c Finn den gjennomsnittlige vekstfarten mellom 2004 og 2013 ifølge modellen.

d Finn den momentane vekstfarten i starten av 2006. Hva forteller svaret oss i praksis?

e En analytiker anbefaler kundene å selge seg ut av fondet når fondet minker med 10 millioner kroner per år. Når bør en tidligst selge seg ut hvis en følger rådet?

f Hvorfor kan vi ikke være sikre på at den momentane vekstfarten får en riktig verdi for denne modellen?

5.54
En funksjon er gitt ved

$f(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

a Finn $f'(x)$.

b Finn de to punktene på grafen der tangentene har stigningstallet 3.

c Bruk CAS til å finne likningene for disse tangentene.

5.55
La f være funksjonen gitt ved

$f(x) = x^2 - 7x + 2$

Bruk definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$.

Bybroen
VIDEREGÅENDE SKOLE

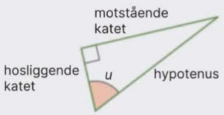
KAPITTEL 6 – TRIGONOMETRI

MØNSTER OG OVERSIKT

Definisjon av sinus, cosinus og tangens

Variant 1, spisse vinkler

La u være en vinkel i en rettvinklet trekant:



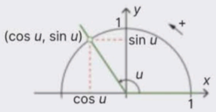
Vi definerer sinus, cosinus og tangens til u:

$$\sin u = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}}$$

$$\cos u = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}}$$

$$\tan u = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}}$$

Variant 2, alle vinkler



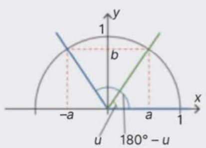
Vi definerer:

$\sin u$ er y-koordinaten til skjæringspunktet

$\cos u$ er x-koordinaten til skjæringspunktet

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

Supplementvinkler



$$\sin(180^\circ - u) = \sin u$$

$$\cos(180^\circ - u) = -\cos u$$

Finne sider og vinkler i rettvinklete trekanter

Hvis trekanten er rettvinklet, bruker vi det forholdstallet (sinus, cosinus eller tangens) som passer.

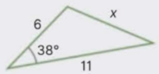
$$\sin 65^\circ = \frac{7}{x}$$

$$x = \frac{7}{\sin 65^\circ}$$

$$x \approx 7{,}72$$

Finne sider og vinkler i trekanter uten rett vinkel

Kjenner to sider og en vinkel

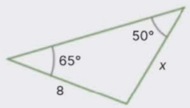


Cosinussetningen

$$6^2 + 11^2 - 2 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \cos 38^\circ = x^2$$

$$x = 7{,}28$$

Kjenner en side og to vinkler



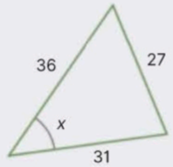
Sinussetningen

$$\frac{x}{\sin 65^\circ} = \frac{8}{\sin 50^\circ}$$

$$x = \frac{8}{\sin 50^\circ} \cdot \sin 65^\circ$$

$$x \approx 9{,}46$$

Kjenner tre sider

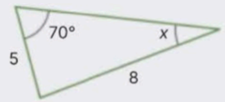


Cosinussetningen:

$$36^2 + 31^2 - 2 \cdot 31 \cdot 36 \cdot \cos x = 27^2$$

$$x \approx 46{,}80^\circ$$

Kjenner to sider og en vinkel



Sinussetningen:

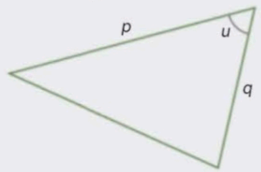
$$\frac{\sin x}{5} = \frac{\sin 70^\circ}{8}$$

$$x \approx 36{,}0^\circ \quad \text{eller} \quad x \approx 144{,}0^\circ$$

Kjenner to vinkler

Bruke at vinkelsummen i en trekant er 180°.

Arealsetningen



La p og q være to sider i en trekant og la u være vinkelen mellom dem. Se figuren. Da er arealet av trekanten gitt ved

$$\text{areal} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin u$$

Digitalt verktøy

Kalkulatoren har egne taster for sinus, cosinus og tangens og deres motsatte varianter $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$. Vi setter innstillingene på grader.

I GeoGebra bruker vi «sin()», «cos()» og «tan()». Vi husker på å bruke gradtegn, for eksempel «cos(80°)». For å finne vinkelen bruker vi kommandoene «asind()», «acosd()» og «atand()».

I Python importerer vi «math» og bruker «math.sin()», «math.cos()» og «math.tan()». Vinkelen konverterer vi først til radianer med «math.radians()», for eksempel «math.sin(math.radians(60))». For å finne vinkelen bruker vi «math.asin()», «math.acos()» og «math.atan()». Vi konverterer resultatet til grader med «math.degrees()», for eksempel «math.degrees(math.acos(.5))».

Avgjør om påstandene stemmer

a Vi kan bare regne med sinus, cosinus og tangens i rettvinklete trekanter.

b Når vi skal regne ut arealet av en trekant, bruker vi noen ganger $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin u$ og noen ganger $\frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

c Det er to vinkler mellom 0° og 180° som har samme sinusverdi.

d Til en vinkel er det alltid to sinusverdier.

e I enhetssirkelen finnes sinus på x-aksen og cosinus på y-aksen.

f Tangens til en vinkel u er forholdet $\frac{\sin u}{\cos u}$ uansett om trekanten er rettvinklet eller ikke.

g For å finne en ukjent vinkel i en trekant bruker vi alltid cosinussetningen.

h Hvis $u = 130^\circ$, er sinusverdien positiv og cosinusverdien negativ.

Test deg selv

Uten hjelpemidler

6.57

a En trekant ABC er rettvinklet med $\angle A = 90^\circ$. Skriv opp definisjonene av sinus, cosinus og tangens på denne trekanten, uttrykt ved sidene AB, AC og BC.

b Tegn en rettvinklet trekant med $\angle A = 70^\circ$. Les av og regn ut en tilnærmingsverdi for sin A.

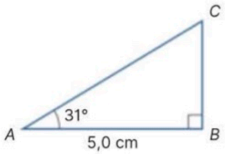
6.58

Tegn en likesidet trekant. Bruk trekanten til å finne de eksakte verdiene til $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ og $\tan 60^\circ$.

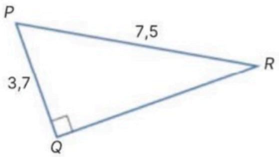
Med hjelpemidler

6.59

a I en trekant ABC er $\angle A = 31^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ og $AB = 5{,}0$ cm. Regn ut BC og AC:



b Regn ut vinklene i trekanten PQR:

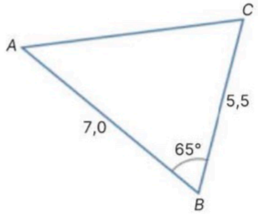


6.60

I $\triangle ABC$ er $AB = 3$, $BC = 4$ og $AC = 6$. Regn ut vinklene i trekanten.

6.61

Figuren viser trekanten ABC:



a Regn ut lengden av AC.

b Regn ut $\angle A$ og $\angle C$.

6.62

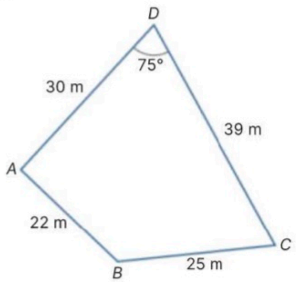
I $\triangle ABC$ er $\angle BAC = 40^\circ$ og $AB = 8{,}0$ cm.

a Hva blir høyden BC i trekanten?

b La $BC = t$. Bruk cosinussetningen til å avgjøre for hvilke verdier av t vi får én, to eller ingen trekanter.

c La $\angle BCA = x$. Bruk sinussetningen til å avgjøre for hvilke verdier av x vi får én, to eller ingen trekanter.

6.63



En tomt har form som på figuren.

a Finn lengden av diagonalen AC.

b Finn $\angle BAC$.

c Finn arealet av tomta.